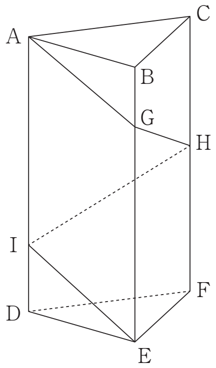
# 第25講　最短距離の問題

## Step 1

1　右の図は，側面がすべて長方形の三角柱 ABC―DEF であり，AB = 4 cm，BC = 3 cm，CA = 5 cm，BE = 12cm である。辺 BE 上に点 G，辺 CF 上に点 H，辺 AD 上に点 I をとり，点 A と点 G，点 G と点 H，点 H と点 I，点 I と点 E をそれぞれ結ぶ。このとき，次の(1)・(2)の問いに答えなさい。



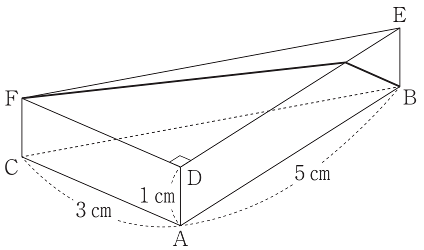

(1)　三角柱 ABC―DEF の表面積を求めよ。

(2)　AG + GH + HI + IE の長さが最小となるとき，その長さを求めよ。

【高知県】

2　右の図のような三角柱がある。

AB = 5 cm，AC = 3 cm，AD = 1 cm，∠EDF = 90° であるとき，次のア，イの問いに答えよ。




ア　この三角柱の辺のうち，面 ACFD と垂直な辺はどれか。すべて書け。

イ　右の図のように，頂点 F から辺 DE を通って頂点 B まで，三角柱の面に沿って糸を張る。張った糸の長さがもっとも短くなるときの，糸の長さは何 cm か。

【香川県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　図1～図3のように，AB = 3 cm，AD = 4 cm，AE = 6 cm の直方体 ABCDEFGH がある。このとき，次の問いに答えなさい。

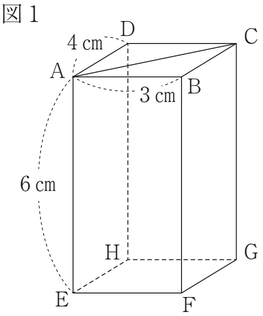
図1


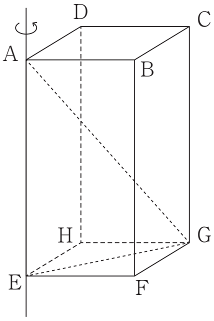
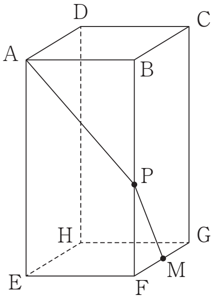

図2



図3



問1　図1において，線分 AC の長さは何 cm か。

問2　直方体 ABCDEFGH の表面積は何 $cm^2$ か。

問3　図2において，△AEG を辺 AE を軸として1回転させてできる円すいの体積は何 $cm^3$ か。

問4　図3のように，辺 FG の中点を M とし，直方体 ABCDEFGH に，頂点 A から辺 BF と交わるように点 M まで糸をかける。かける糸の長さが最も短くなるときの，糸と辺 BF との交点を P とする。このとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1)　線分 AP と線分 PM の長さの比を最も簡単な整数の比で表せ。

(2)　台形 AEFP の面積は何 $cm^2$ か。

【長崎県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

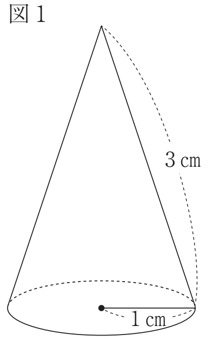
## Step　2

4　右の図１のように，底面の半径が１cm，母線の長さが３cm の円すいがある。

このとき，次の問いに答えなさい。

ただし，円周率は $\pi$ とする。

図１

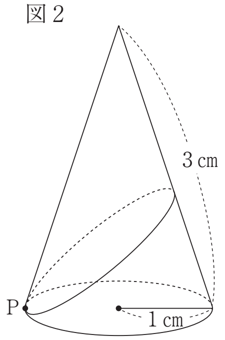



(1)　この円すいの体積を求めなさい。

(2)　この円すいの表面積を求めなさい。

(3)　右の図２のように，底面の円周上の点Ｐから円すいの側面を１周して，点Ｐまでひもをかける。ひもの長さが最も短くなるときのひもの長さを求めなさい。

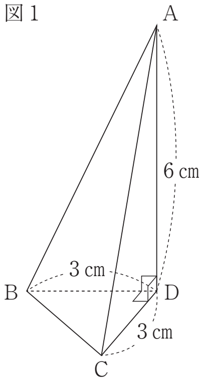
図２




【富山県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

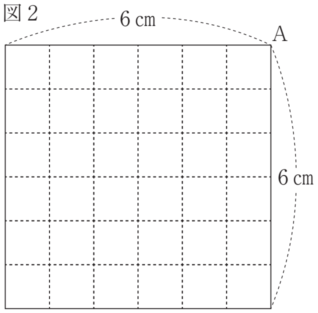
5　図1，図3のように，三角すいABCDがあり，∠ADB = ∠ADC = ∠BDC = 90°，AD = 6 cm，BD = CD = 3 cmである。このとき，次の問いに答えなさい。

図1


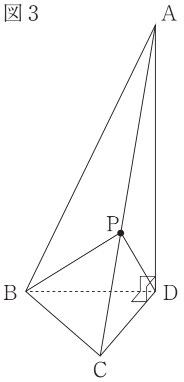

問1　図1において，辺ADとねじれの位置にある辺を答えよ。

問2　三角すいABCDの体積は何 $cm^3$ か。

問3　三角すいABCDを辺にそって切り開くと，図2のような1辺が6 cmの正方形になった。このとき，図1の3つの辺AB，BC，CAを図2に実線でかき入れよ。なお，作図の参考となるように，図2には頂点Aと1目もりが縦横それぞれ1 cmの方眼をかき入れている。

図2



問4　図3において，辺AC上を動く点をPとする。2つの線分BP，PDの長さの和BP + PDが最小となるとき，BP + PDの長さは何cmか。

図3


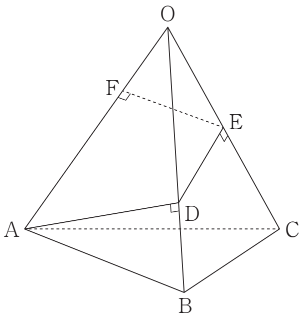

【長崎県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

## Step 3

6 右の図のように, OA ＝ OB ＝ OC ＝ 4 cm, ∠AOB ＝∠BOC ＝∠COA ＝ 45°の三角すい OABC がある。点 A から辺 OB に垂線 AD をひき，点 D から辺 OC に垂線 DE をひき，点 E から辺 OA に垂線 EF をひく。

このとき，⑴～⑷の各問いに答えなさい。




⑴ 線分 OD の長さを求めなさい。

⑵ 線分 EF の長さを求めなさい。

⑶ 四角形 ACEF の面積を求めなさい。

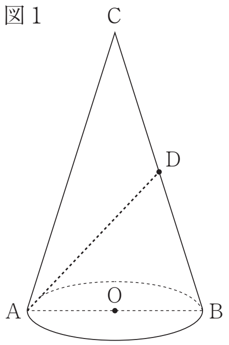
⑷ 三角すい OABC に，点 A から点 F まで，辺 OB，辺 OC の順に交わるようにひもをかける。ひもの長さが最も短くなるとき，ひもの長さを求めなさい。

【佐賀県】

7 右の図 1 は，線分 AB を直径とする円 O を底面とし，線分 AC を母線とする円すいであり，点 D は線分 BC の中点である。

AB ＝ 6 cm，AC ＝ 10cm のとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は $\pi$ とする。

図 1

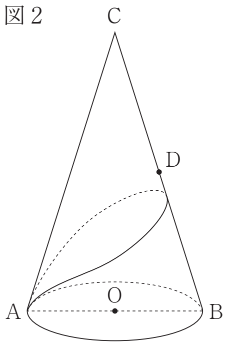



㈠ この円すいの体積を求めなさい。

㈡ この円すいにおいて，2 点 A，D 間の距離を求めなさい。

㈢ この円すいの表面上に，図 2 のように点 A から線分 BC と交わるように，点 A まで線を引く。このような線のうち，長さが最も短くなるように引いた線の長さを求めなさい。

図 2




【神奈川県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

# 第25講　最短距離の問題

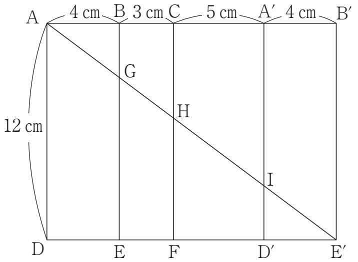
## Step　1

1　(1) 156 ($cm^2$)　(2) 20 (cm)

≪解説≫

(1) BC：AB：CA = 3：4：5より，△ABCは∠ABC = 90°の直角三角形。よって，三角柱ABC―DEFの表面積は，$\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3\right) \times 2 + 12 \times (3 + 4 + 5) = 156$ ($cm^2$)

(2) 右図は三角柱ABC―DEFの側面の展開図に，長方形ADEBと合同な長方形A′D′E′B′をかき加えたものである。AG + GH + HI + IEの長さが最小となるのは，右図において，点A，G，H，I，E′が一直線上に並ぶときだから，求める長さは線分AE′の長さとなる。AD = 12cm，DE′ = DE + EF + FD′ + D′E′ = 4 + 3 + 5 + 4 = 16 (cm)より，AE′ = $\sqrt{12^2 + 16^2} = 20$ (cm)

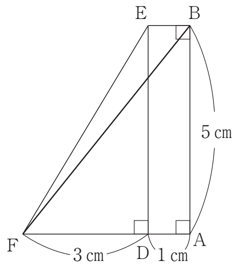



2　ア．辺AB，辺DE　イ．$\sqrt{41}$ (cm)

≪解説≫

ア．∠BAD = ∠BAC = 90°より，辺AB。また，∠ADE = ∠EDF = 90°より，辺DE。

イ．三角柱の展開図の一部である右図で，線分FBが求める糸の長さになる。よって，FB = $\sqrt{FA^2 + AB^2} = \sqrt{(3 + 1)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$ (cm)




3　問1．5 (cm)　問2．108 ($cm^2$)　問3．$50\pi$ ($cm^3$)

問4．(1) (AP：PM =) 3：2　(2) $\frac{63}{5}$ ($cm^2$)

≪解説≫

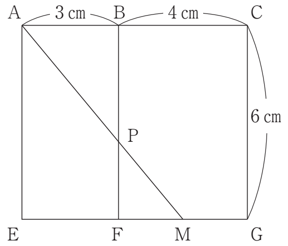
問1．△ABCで三平方の定理より，AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (cm)

問2．底面積は，$3 \times 4 = 12$ ($cm^2$)　側面積は，$\{(3 + 4) \times 2\} \times 6 = 84$ ($cm^2$)　よって，求める表面積は，$12 \times 2 + 84 = 108$ ($cm^2$)

問3．できる円すいは，底面の半径がEG，高さがAEだから，その体積は，$\frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 \times 6 = 50\pi$ ($cm^3$)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問 4. (1) 頂点 A から点 M への最短経路は，右図のような直方体の展開図の一部における線分 AM で，点 P は線分 AM と辺 BF との交点になる。よって，AC ∥ EG より，AP : PM = AB : FM = $3 : \left(4 \times \frac{1}{2}\right) = 3 : 2$ (2) (1)より，BP : PF = 3 : 2 だから，PF $= \frac{2}{5}$BF $= \frac{2}{5} \times 6 = \frac{12}{5}$ (cm) よって，台形 AEFP $= \frac{1}{2} \times \left(\frac{12}{5} + 6\right) \times 3 = \frac{63}{5}$ (cm$^2$)



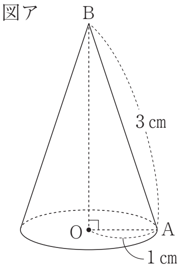

## Step 2

4 (1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm$^3$) (2) $4\pi$ (cm$^2$) (3) $3\sqrt{3}$ (cm)

≪解説≫

(1) 右図アの直角三角形 OAB で，三平方の定理より，OB $= \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (cm) よって，円すいの体積は，$\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times 2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (cm$^3$)

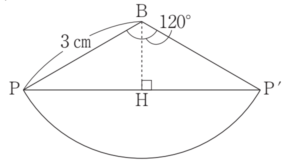
図ア




(2) 底面積は，$\pi \times 1^2 = \pi$ (cm$^2$) 側面を展開すると，半径 3 cm のおうぎ形になり，おうぎ形の中心角は，$360° \times \frac{2\pi \times 1}{2\pi \times 3} = 120°$ これより，側面積は，$\pi \times 3^2 \times \frac{120}{360} = 3\pi$ (cm$^2$) よって，表面積は，$\pi + 3\pi = 4\pi$ (cm$^2$)

(3) 側面の展開図は右図イのようになり，ひもは線分 PP′ になる。点 B から PP′ に垂線 BH をひくと，△BPH は 30°，60° の直角三角形だから，PH $= \frac{\sqrt{3}}{2}$BP $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm) よって，PP′ = 2PH $= 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (cm)

図イ




5 問 1. 辺 BC 問 2. 9 (cm$^3$) 問 3. (次図ア) 問 4. $3\sqrt{5}$ (cm)

≪解説≫

問 1. 平行でなく交わらない 2 直線をねじれの位置にあるという。よって，辺 AD とねじれの位置にある辺は辺 BC。

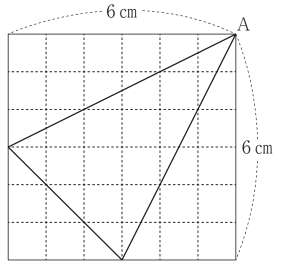
問 2. △BCD を底面とすると，高さは AD だから，三角すい ABCD $= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) \times 6 = 9$ (cm$^3$)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

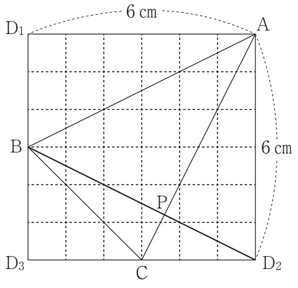
問 3. △ADB，△ADC は，直角をはさむ 2 辺が 3 cm，6 cm の直角三角形で，△BCD は等辺が 3 cm の直角二等辺三角形であることから，3 つの辺 AB，BC，CA をかき入れると，下図アのようになる。

問 4. 下図イで，3 点 B，P，$D_2$ が一直線上に並ぶとき，BP + PD の長さは最小となる。よって，求める長さは，$BD_2 = \sqrt{BD_3{}^2 + D_2D_3{}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$ (cm)

図ア




図イ




## Step　3

6　(1) $2\sqrt{2}$ (cm)　(2) $\sqrt{2}$ (cm)　(3) $4\sqrt{2} - 1$ ($cm^2$)　(4) $\sqrt{26}$ (cm)

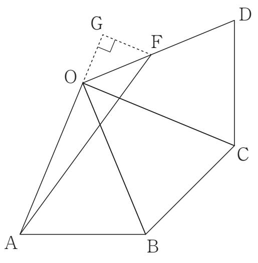
≪解説≫

(1) △OAD は，∠ODA = 90°，∠AOD = 45° より，直角二等辺三角形なので，$OD = \frac{1}{\sqrt{2}}OA = 2\sqrt{2}$ (cm)

(2) △ODE と△OEF も，△OAD と同様に直角二等辺三角形なので，$OE = \frac{1}{\sqrt{2}}OD = 2$ (cm)，$EF = \frac{1}{\sqrt{2}}OE = \sqrt{2}$ (cm)

(3) $AD = OD = 2\sqrt{2}$ cm より，$△OAC = △OAB = \frac{1}{2} \times OB \times AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ($cm^2$)　また，$OF = EF = \sqrt{2}$ cm より，$△OEF = \frac{1}{2} \times OF \times EF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$ ($cm^2$)　よって，四角形 ACEF = △OAC − △OEF = $4\sqrt{2} - 1$ ($cm^2$)

(4) 側面の展開図で考えると，右図の線分 AF が求めるひもの長さになる。AO の延長線に F から垂線をひき，交点を G とすると，∠GOF = 180° − 45° × 3 = 45° なので，△OFG は直角二等辺三角形。これより，$OG = GF = \frac{1}{\sqrt{2}}OF = 1$ (cm) なので，AG = 4 + 1 = 5 (cm)　よって，直角三角形 AFG において，三平方の定理より，$AF = \sqrt{AG^2 + GF^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ (cm)




©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

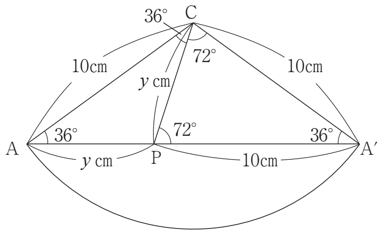
7　(ア) $3\sqrt{91}\pi$ (cm$^3$)　(イ) $\sqrt{43}$ (cm)　(ウ) $5+5\sqrt{5}$ (cm)

≪解説≫

(ア) 図1においてCとOを結ぶと，COは円すいの高さなので，AO $=6\div2=3$ (cm)より，CO $=\sqrt{AC^2-AO^2}=\sqrt{10^2-3^2}=\sqrt{91}$ (cm)　よって，求める体積は，$\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times\sqrt{91}=3\sqrt{91}\pi$ (cm$^3$)

(イ) 点DからABに垂線DHを下ろすと，DH∥CO，BD＝DCより，DH $=\frac{1}{2}$CO $=\frac{1}{2}\times\sqrt{91}=\frac{\sqrt{91}}{2}$ (cm)　また，BH $=\frac{1}{2}$BO $=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$ (cm)なので，AH $=$ AB $-$ BH $=6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ (cm)　よって，△ADHにおいて，AD $=\sqrt{AH^2+DH^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{91}}{2}\right)^2}=\sqrt{43}$ (cm)

(ウ) 右図のようなこの円すいの側面の展開図となるおうぎ形において，図2のように引いた線の最短経路は線分AA′となる。このおうぎ形の中心角を$x$°とすると，おうぎ形の弧の長さと底面の円周は等しいから，$2\times\pi\times10\times\frac{x}{360}=6\pi$　これを解いて，$x=108$




△ACA′は二等辺三角形だから，∠A＝∠A′＝$(180°-108°)\div2=36°$　ここで，右図のように，∠ACP＝36°となる点PをAA′上にとると，∠PAC＝∠ACP＝36°より，△APCは二等辺三角形。また，∠A′CP $=108°-36°=72°$で，△A′CPの内角の和より，∠CPA′ $=180°-(36°+72°)=72°$なので，△A′CPは二等辺三角形で，A′P＝A′C＝10cm　これより，AP＝PC＝$y$ cmとおくと，AA′＝AP＋A′P＝$y+10$ (cm)　△ACA′と△APCはともに底角が36°の二等辺三角形で相似なので，AC：AP＝AA′：ACが成り立つことから，$10:y=(y+10):10$より，$y(y+10)=100$となり，$y^2+10y-100=0$　解の公式より，$y=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times1\times(-100)}}{2\times1}=-5\pm5\sqrt{5}$　$y>0$より，$y=-5+5\sqrt{5}$なので，求める長さは，AA′ $=y+10=-5+5\sqrt{5}+10=5+5\sqrt{5}$ (cm)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。